

CONCOURS D'ACCÈS À LA FORMATION DE TROISIÈME CYCLE
EN VUE DE L'OBTENTION DU **DOCTORAT EN PHYSIQUE**
AU TITRE DE L'ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020/2021
ÉPREUVE DE **MÉCANIQUE QUANTIQUE**.

Exercice 1.

Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ trois opérateurs définis linéaires et arbitraires.

1. Montrer les identités suivantes :

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$$

► Comment appelle-t-on ces deux formules ?

2. En déduire alors que :

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \exp \left\{ \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] \right\}.$$

3. Dans un autre contexte, considérons un oscillateur harmonique simple dont l'hamiltonien est défini par :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2.$$

(a) Montrer que $[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{x}^2]] = (2\hbar\omega)^2 \hat{x}^2 - \frac{4\hbar^2}{m} \hat{H}.$

(b) Calculer le commutateur $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}].$

Données. – On donne :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \text{et} \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Exercice 2.

Une particule de masse μ se déplace dans le plan $\mathbb{R}^2$ et est soumise au potentiel central de type $V(r)$.

1. Considérons le système des coordonnées polaires $\rho = (r, \theta)$. Exprimer l'expression de $\vec{p}^2$ en fonction des coordonnées r et θ .
2. En déduire l'équation propre pour $\psi(\rho)$. Montrer alors que l'équation admet une séparation de variables.
3. Selon la question précédente, on pose le choix suivant pour $\psi(\rho)$:

$$\psi(\rho) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \exp(im\theta).$$

- (a) Que représente le nombre m ?
- (b) Dans ce cas, écrire l'équation différentielle satisfaisant la fonction radiale $u(r)$.